FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

La expresión $y=f(x)$**,** define una función de una sola variable independiente, en este caso x. Sin embargo, en la realidad, las cantidades físicas dependen de más de una variable.

Ejemplos:

- El volumen V de un cilindro circular recto depende de su radio r y de su altura h

$$V=\pi r^2 h$$

Es decir, $V=f(r,h)$

- La presión P de un gas depende del volumen V, temperatura T y del número de moles n

$$P=\frac{nRT}{V} \qquad (R \text{ es una constante})$$

Es decir, $P=f(V,T,n)$

Como se puede observar, el concepto de función se extiende a más de una variable independiente. El Cálculo que estudia las funciones de varias variables independientes se conoce como *Cálculo Multivariado*.

Funciones de dos variables

Definición: Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de
números reales (x,y) un número real único denotado por $f(x,y)$.

En general, una función de dos variables se escribe $z=f(x,y)$. Las variables x, y son independientes y z es la variable dependiente. La gráfica de una función de dos variables representa una *superficie* en el espacio tridimensional.

Dos consecuencias importantes de esta definición:

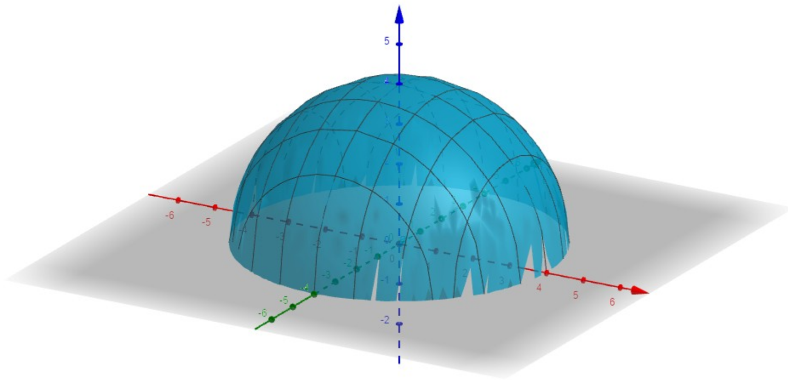
1. El dominio de una función de dos variables se encuentra en el plano xy
2. El valor de la función corresponde al valor de la coordenada que indica la elevación z

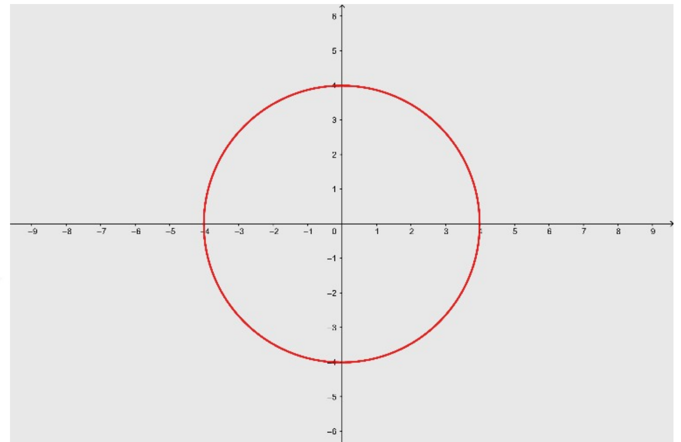
En el caso de una función de dos variables se tienen las mismas restricciones para el dominio que se aplicaban a las funciones de variable real en el curso de Cálculo Diferencial:

- No está permitida la división entre cero
- No están permitidas las raíces de índice par con cantidad sub-radical negativa
- No está permitido el logaritmo de cero ni de un número negativo

Ejemplo: Analizar la función $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$

Solución: Se trata de un hemisferio de radio 4. Con ayuda del GeoGebra obtenemos su gráfica. Podemos observar que el Dominio de esta función es un círculo de radio 4 con centro en el origen que se encuentra en el plano xy





La superficie es un hemisferio

El Dominio es un círculo de radio 4

Se puede evaluar la función en diferentes puntos del dominio:

En el origen: $f(0{,}0)=\sqrt{16-0^2-0^2}=\sqrt{16}=4$. Corresponde al máximo del hemisferio, la intersección con el eje z, donde la coordenada toma el valor de 4. Recordar que el valor de la función es igual al de la coordenada z, la cual indica la elevación.

En el punto (3,2): $f(3{,}2)=\sqrt{16-3^2-2^2}=\sqrt{3}$

En el punto (5,0): $f(5{,}0)=\sqrt{16-5^2-0^2}=\sqrt{-9}$ No existe en los reales. Es un resultado lógico puesto que el punto (5,0) no pertenece al Dominio de la función, debido a que nos hemos salido del círculo de radio 4.

Se puede construir una tabla de valores:

x	*y*	*f(x,y)*
0	0	4
1	2	$\sqrt{11}$
2	2	$2\sqrt{2}$
3	2	$\sqrt{3}$
0	4	0
5	0	No existe
Etc.		

En forma analítica podemos calcular el Dominio si tenemos en cuenta la segunda restricción para funciones de variable real: “No están permitidas las raíces de índice par con cantidad subradical negativa”

Por lo tanto, tomamos la cantidad subradical y escribimos la desigualdad:

$$16-x^2-y^2\geq 0$$

Transformamos la desigualdad para poder interpretar su significado. Como las variables tienen signo menos multiplicamos por -1:

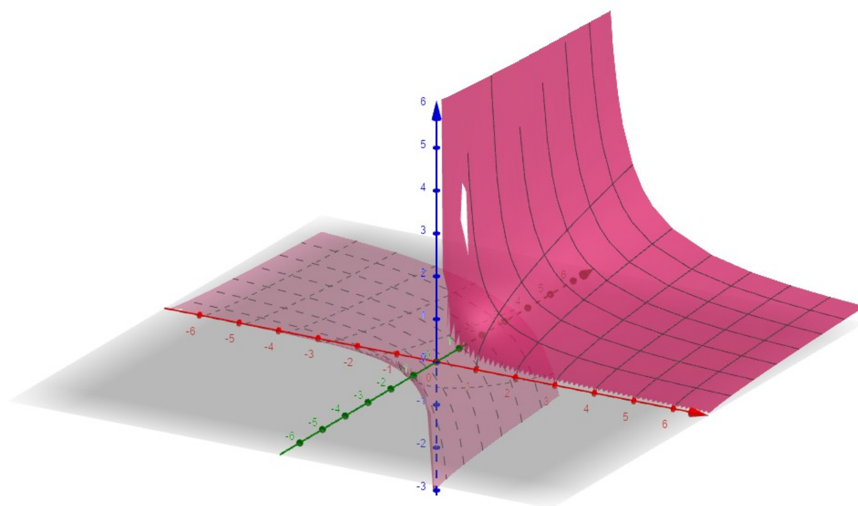
$$-16+x^2+y^2\leq 0$$
$$x^2+y^2\leq 16$$

Esta última desigualdad representa todos los puntos por dentro y sobre una circunferencia de radio 4 con centro en el origen, un resultado que ya habíamos obtenido en forma gráfica.

Pregunta: ¿Cuál sería el rango de esta función? $0\leq z\leq 4$

Ejemplo: Analizar la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{x}$

No es una superficie conocida (plano, esfera, cilindro o cuádrica). Con ayuda del GeoGebra obtenemos su gráfica



Observamos discontinuidad en el origen y a lo largo del eje y (color verde). Además, la variable y solo asume valores positivos.

Para encontrar el Dominio en forma analítica debemos tener en cuenta dos restricciones:

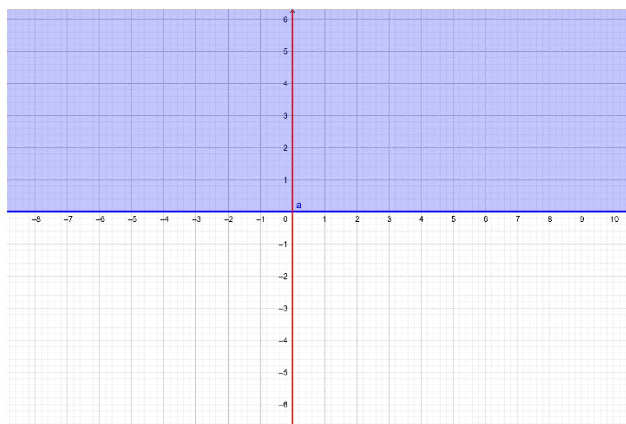
1. “No están permitidas las raíces de índice par con cantidad subradical negativa”

Por lo tanto, en el numerador debe cumplirse $y\geq 0$, es decir, son válidos todos los puntos por encima del eje x

2. “No está permitida la división entre cero”

Por lo tanto, en el denominador debe cumplirse $x \neq 0$, es decir, no están permitidos los puntos ubicados sobre el eje y

De esta manera, se concluye que el Dominio de la función está conformado por los dos primeros cuadrantes del plano xy**,** con la excepción de todos los puntos ubicados sobre el eje y, como se puede apreciar en la figura:



Pregunta: ¿Cuál sería el rango de esta función?

Ejercicios propuestos:

Analizar cada una de las siguientes funciones y determinar el Dominio en forma gráfica y analítica. Utilice el GeoGebra para obtener la gráfica de la función y del Dominio

1. $f(x,y)=\frac{1}{xy}$
2. $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$
3. $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$
4. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}$
5. $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-16y^2}$
6. $f(x,y)=y-\cos(¿x)¿$

Respuestas

1. Dominio: Todo el plano xy excepto los ejes coordenados
2. Dominio: Todos los puntos que están sobre y por fuera de la circunferencia de radio 3 con centro en el origen, excepto los puntos (0,3) y (0,-3)
3. Todo el plano xy excepto el origen
4. Todos los puntos por arriba de la recta $y=-x$
5. Todos los puntos sobre y por dentro de la elipse $\frac{x^2}{16}+y^2=1$